Сводка теорем с идеями доказательства по курсу “Основы кибернетики”

Создан по лекциям Ложкина С.А. в 2012 году

Авторы:
Каганов В. Ю.
Королёв А. К.
и другие

Лемма. Совершенная ДНФ ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, является единственной ДНФ от БП $X(n)$, которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.

Этапы доказательства. Воспользоваться тем, что у этой ФАЛ нет граней размерности более 0. □

Следствие. Совершенные ДНФ ФАЛ $l_n, \bar{l}_n$ являются единственными ДНФ этих ФАЛ от БП X(n).

Теорема. Пусть $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ – сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а неприводимая ДНФ $\mathcal{U}$ получается из формулы $\mathcal{U}' \cdot \mathcal{U}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathcal{U}$ – сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

Этапы доказательства. Докажем, что в $\mathcal{U}$ входит любая простая импликанта f. $\forall K$ – простой импликанты f: K – импликанта f' и f''. В $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}''$ есть K', K'', которые имплицируются K. В $\mathcal{U}$ войдет имплицируемая $K' \cdot K''$ ЭК $\bar{K}$. K имплицирует $K' \cdot K''$, следовательно, и $\bar{K}$. $\bar{K}$ – одновременно импликанта f и имплицируется $K \Rightarrow \bar{K} = K$. □

Следствие. Если неприводимая ДНФ $\mathcal{U}$ получается из КНФ В ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathcal{U}$ – сокращенная ДНФ ФАЛ f.

Теорема. Неприводимая ДНФ является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Этапы доказательства. Докажем, что, если ДНФ неприводивая и не имеет строгих расширений, то она содержит все простые импликанты f. Рассмотрим ЭК k максимального ранга из множества тех импликант f, которые не являются импликантами ни одной ЭК из $\mathcal{U}$. Поскольку ее ранг строго меньше числа всех букв, найдется x_i, не входящая в нее. Рассмотрим ЭК вида $x_i \cdot k$ ($\bar{x}_i \cdot k$). Они суть импликанты некоторых $x_i \cdot K'$ ($\bar{x}_i \cdot K''$); K', K'' состоят из букв k. По обобщенному склеиванию, она еще и импликанта $K'K'' = \tilde{K}$, которая сама импликанта некоторой ЭК из формулы. Противоречие, т.к. получилось, что k – импликанта некоторой ЭК из формулы.

Следствие. Из любой ДНФ $\mathcal{U}$ ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения неприводимой ДНФ, не имеющей строгих расширений.

Лемма. ДНФ $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f, которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

Этапы доказательства. Пусть в тупиковой нет импликанты, соответствующей ядровой грани. Тогда $f = 0$ на ядровой точке (ведь получилась непокрытая ядровая точка). Значит, простая импликанта, покрывающая ядровую точку, входит во все тупиковые ДНФ. Теперь, пусть K – простая импликанта f, не входящая в ядро. Значит, есть другие импликанты, которые покрывают ее единицы, найдется такая тупиковая ДНФ, в которой K не будет (можно выделить тупиковое подпокрытие, не содержащее K), в пересечении ее не будет. □

Теорема. Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.

Этапы доказательства. $\forall$ регулярной точки α найдется нерегулярная β. Система граней из всех β покроет все α. Противоречие с тупиковостью. Пучок нерегулярной точки α строго меньше пучка любой точки $\beta \in N_f \backslash N_k$ (из этого следует, что нашлась такая грань N_{K_j}, которая покрыла β, из чего следует неравенство пучков), где k – грань, содержащая α. Значит, N_k удалить нельзя. □

Утверждение. Если ФАЛ f монотонно зависит от БП x_i, то ни одна из ее простых импликант не может содержать букву $\bar{x}_i$.

Этапы доказательства. Пусть есть импликанта $\bar{x}_i K$. Тогда на наборе, который обращает K в 1, и $x_i = 0$, импликанта равна 1, а на наборе, где $x_i = 1$ (большем, чем предыдущий) импликанта равна 0, что противоречит монотонности.

Лемма. Сокращенная ДНФ $\mathcal{U}$ монотонной ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид $\mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+(x_1, \ldots, x_n)$. При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f.

Этапы доказательства. $K_\beta^+(\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq \beta$. Следовательно, β – единственная нижняя единица K_β^+, $K_{\beta'}^+$ имплицирует $K_{\beta''}^+$ тогда и только тогда, когда

$\beta' \geq \beta''$. Получим, что K_{β}^{+} – простая импликанта f в том и только том случае, когда $\beta \in N_f^{+}$. И β – ядровая точка f. □

Следствие. Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

Лемма. Функция покрытия $F(y_1, \ldots, y_p)$ матрицы $M, M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида: $F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge\limits_{j=1}^{s} (\bigvee\limits_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M<i,j>=1}} y_i)$.

Этапы доказательства. Пусть J_j – то, что в скобках. $J_j(\beta) = 1$ для произвольного $\beta \Leftrightarrow$ мн-во строк с номерами из $I(\beta)$ покрывают j столбец $\Rightarrow$ вся КНФ обращается в 1 тогда и только тогда, когда $I(\beta)$ образуют покрытие. □

Следствие. В результате раскрытия скобок и приведения подобных из упомянутой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M.

Теорема. Пусть для действительного $\gamma, 0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы $M, M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M, получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем $\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^{+}(\gamma s) \rceil + \frac{1}{\gamma}$. $\ln^{+} x = \ln x$, если $x \geq 1$, $\ln^{+} x = 0, 0 < x < 1$.

Этапы доказательства. Пусть покрытие длины q. Рассмотрим шаг t алгоритма. δ_t – доля оставшихся столбцов. Поскольку за один шаг мы удаляем не менее одного столбца, справедливо неравенство: $q \leq t + \delta_t \cdot s$. В матрице на шаге t всего $\gamma p s \delta_t$ единиц, в среднем, $\gamma s \delta_t$ в строке. Таким образом, в максимальной строке не меньше, чем $\gamma s \delta_t$ единиц. Отсюда получаем $s\delta_{t+1} = s_{t+1} \leq s_t - \gamma s \delta_t = s\delta_t(1-\gamma)$. Следовательно, $\delta_t \leq (1-\gamma)^t \leq e^{-\gamma t}$. Взяв параметр t нужным образом, и подставив его в первое неравенство, получим необходимую оценку.

Лемма. При любых натуральных n и $m, m \leq n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m.

Этапы доказательства. Рассмотреть множество граней ранга m и систему его подмножеств, проходящих через точку α. Рассмотреть матрицу, связанную с этой парой и воспользоваться предыдущей теоремой. □

Лемма. Для любого $n, n \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения $\lambda(n) = 2^{n-1}$ (это **длина**), $R(n) = n \cdot 2^{n-1}$ (это **ранг**).

Этапы доказательства. Нижние оценки – из совершенной ДНФ линейной. Верхние – из разложения Шеннона по всем переменным, кроме первой (тогда получится не более 2^{n-1} слагаемых рангом $\leq n$ из-за того, что раскладываем по $n-1$ переменной и еще опционально умножаем на 1 букву) □

Утверждение. Почти для всех ФАЛ из $P_2(n)$ верно $|N_f| = 2^{n-1} \cdot (1 \pm O(n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}))$.

Этапы доказательства. Оценить матожидание и дисперсию случайной величины, равной 0 или 1 с равными вероятностями ($\mathbb{E} = \frac{1}{2}; \mathbb{D} = \frac{1}{4}$), потом перейти к случаю суммы из n таких случайных величин ($\mathbb{E} = 2^{n-1}; \mathbb{D} = 2^{n-2}$). Затем воспользоваться неравенством Чебышева. □

Лемма. Для почти всех ФАЛ f из $P_2(n)$ выполнены неравенства: $\lambda(f) \leq \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} \cdot (1 \pm O(n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}))$ и $R(f) \leq \frac{3}{4} \cdot n \cdot 2^{n-1} \cdot (1 \pm O(n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}))$.

Этапы доказательства. Рассмотреть случайную величину как дизъюнкцию двух, оценить ее дисперсию и матожидание ($\mathbb{E} = \frac{3}{4}; \mathbb{D} = \frac{3}{16}$), затем вычислить их для суммы из n таких случайных величин ($\mathbb{E} = \frac{3}{4} 2^{n-1}; \mathbb{D} = \frac{3}{16} 2^{n-1}$). Далее, аналогично предыдущему утверждению. □

Лемма. Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geq 4$, вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \ldots \oplus x_n)$, где $\bar{N} = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно, $2^{2^{n-4}}$).

Этапы доказательства. Вывести вид простой импликанты из свойств f и g (Всего в сокращенной ДНФ f 6 разных ЭК, а $\oplus$ всех степеней ЭК g равна 1, ведь она линейна). Получить геометрическое представление (циклы длины 6, всего их 2^{n-4}). Любая тупиковая (минимальная) включает одно из 5 (2) реберных покрытий для каждого цикла, поэтому получаются оценки из условия. □

Следствие. $\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}$, $\mu_n(n) \geq 2^{2^{n-4}}$.

Лемма. $\lambda_{\text{сокр}}(n) \geq e_1 \cdot \frac{3^n}{n}$, где e_1 – некоторая константа.

Этапы доказательства. Поясковая ФАЛ от n перменных с рабочими числами $[r,p]$имеет ДНФ $\bigvee\limits_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n+p-r}\le n\\ \sigma_1+\dots+\sigma_{n+p-r}=r}} x_{i_1}^{\sigma_1}\cdots x_{i_{n+r-p}}^{n+r-p}$. То есть сначала мы выбираем среди n переменных r переменных без отрицания, а потом среди $n-r$ переменных $n-p$ с отрицанием. Так что ее длина равна $C_r^n \cdot C_{n-p}^{n-r}$. Воспользовавшись формулой Стирлинга, получим утверждение леммы □

Теорема (Журавлева). При любом $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Этапы доказательства. Построим цепную функцию f четной длины $t = 2k \ge 2n-2 \ge 4$, далее получим цепные ФАЛ f', f'' нечетной длины $2k-1$ удалением первой и последней вершины из ФАЛ f. Тогда каждое ребро $\mathcal{N}_i$, где $i = 2, \dots, t-1$, входит в ДНФ ΣM одной из них, но не входит в ДНФ ΣM другой. В качестве N_K возьмем N_k.

В качестве f надо брать ФАЛ длины $(2n-2)$, у которой N_f из таких наборов, где первые i переменных равны 1, остальные нули, $i \in [1,n]$ и отрицаний к этим наборам (всего $2n-1$ наборов). Ее ребра, $(2n-2)$ штуки, будут иметь вид $\{a_j, a_{j+1}\}$. □

Лемма. Для формулы $\mathcal{F}, \mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, выполняются неравенства $R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1 \le L(\mathcal{F}) + 1 \le 2^{D(\mathcal{F})}$, где $L_{\&,\vee}(\mathcal{F})$ – число ФС & и $\vee$ в формуле $\mathcal{F}$.

Этапы доказательства. Вычислить число ребер, входящих в вершины дерева и выходящих из вершин и приравнять их. Второе соотношение – индукцией (наибольший ранг будет при полном дереве из бинарных операций, и он будет 2^D). □

Следствие. $D(\mathcal{F}) \ge \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil$.

Теорема. Для любой формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathcal{U}^\Phi$ существует подобная ей формула $\mathcal{F}'$ такая, что $D(\mathcal{F}') \le \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + Alt(\mathcal{F})$.

Этапы доказательства. Проведем доказательство индукцией по рангу. Для тривиальной формулы при $R = 1$ утверждение выполнено. Пускай оно выполнено для ранга $r-1$. Пусть формула $\mathcal{F}$ имеет ранг r и альтернирование a. Представим формулу в виде дизъюнкции или конъюнкции формул меньшего ранга, у которых альтернирование не больше $a' = \max\{0, (a-1)\}$. d равно сумме глубины $\mathcal{F}$ и $a - a'$. d_i – глубина $\mathcal{F}_i$. $\sum\limits_{i=1}^{t} 2^{d_i} \le 2^d$. Для каждой формулы $\mathcal{F}_i$ построим подобную ей $\check{\mathcal{F}}_i$ такую, что $D(\check{\mathcal{F}}_i) \le d_i + a'$. Упорядочим формулы по возрастанию глубины и подставим их в полное двоичное d-ярусное дерево, удалив не используемые ФС. Тогда $D(\check{\mathcal{F}}) \le d + a'$, что и требовалось доказать.

Следствие. Для любой ЭК или ЭД K существует подобная формула K' такая, что $D(K) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil$, которая минимальна по глубине.

Следствие. Для любой ДНФ или КНФ $\mathcal{U}$ существует формула $\mathcal{U}'$, что $D(\mathcal{U}') = \lceil \log(L(\mathcal{U}) + 1) + 1 \rceil$.

Лемма. Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau_{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

Этапы доказательства. Сначала привести формулу с помощью τ^M к формуле с поднятыми отрицаниями. Затем, используя $\tau^D_{\&,\vee}, \tau^K_{\&}$ раскрыть скобки. Наконец, с помощью $\tau^{\text{ПП}}$, где $\tau^{\text{ПП}} = \{\tau^A, \tau^K, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}, \tau^{\text{П}}\}$, привести подобные в 3 шага: приведение всех ОЭК в канонические ОЭК, устранения повторных вхождений равных ЭК или подформул $x \vee \bar{x}$, приведение поглощений ЭК; с помощью тождества дистрибутивности дополнить все КНФ до необходимого ранга. Тождества ассоциативности, коммутативности и подстановки констант действуют на двух последних шагах. □

Теорема. Система $\tau_{\text{осн}}$ – полная система тождеств.

Этапы доказательства. Пусть две формулы эквивалентны. Можно свести обе к ОДНФ с помощью предыдущей леммы, используя только $\tau_{\text{осн}}$. Значит, она – полная система тождеств. □

Лемма. Для приведенной СФЭ $\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}^C$, с одним выходом, выполняются неравенства $R(\Sigma) \le L_{\&,\vee}(\Sigma) + 1 \le L(\Sigma) + 1 \le 2^{D(\Sigma)}$, где $L_{\&,\vee}(\Sigma)$ – число ФС & и $\vee$ в Σ.

Этапы доказательства. Эта лемма – просто перенос на класс СФЭ леммы из §2. □

Лемма. Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства $|\mathcal{U}^\Phi(L,n)| \le (10n)^{L+1}$, $||\mathcal{U}^\Phi(L,n)|| \le (8n)^{L+1}$, $|\mathcal{U}^\Phi[D,n]| \le (8n)^{2^D}$.

Этапы доказательства. Сопоставляем каждой внутренней вершине дерева набор из B^2 (для конъюнкций и дизъюнкций) или B^1 (для отрицаний) – его i-й элемент равен 1, если дуга с номером i, выходящая из вершины, начинается с листа. Кроме того, для вершин с наборами из B^2, сопоставим символ из набора $[\vee, \&]$. Тогда получится $4_{(\text{число наборов в } B^2)} \times 2_{(\text{символ операции})} + 2_{(\text{число наборов в } B^1)} = 10$ возможных вариантов атрибута вершины. Получаем оценку $(10n)^{L+1}$. Оценка $(8n)^{L+1}$ получается из-за отождествления наборов (01) и (10) в B^2, там, где получалось 10, получается $3 \times 2 + 2 = 8$. Последнее получается из предпоследнего и первой леммы в §2. □

Лемма. Для любых натуральных n и L выполняется неравенство $||\mathcal{U}^C(L,n)|| \le (8(L+n))^{L+1}$.

Этапы доказательства. Получается из приведенной в предыдущей лемме оценки числа деревьев и того факта, что каждый лист можно присоединить либо к n входам, либо к L внутренним вершинам. □

Теорема. Если τ – конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, то $\{\underline{\tau}, \tau^{\text{С}}, \tau^{\text{В}}\}$ – конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$.

Этапы доказательства. С помощью тождеств снятия и ветвления избавляемся от всех внутренних ветвлений и висячих вершин, получаем схему, которая моделирует формулу. А для преобразования в формулах используется $\underline{\tau}$. □

Следствие. Система тождеств $\{\underline{\tau}^{\text{осн}}, \tau^{\text{В}}, \tau^{\text{С}}\}$ – КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\text{С}}$.

Теорема. Теорема перехода. Пусть τ – КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, а Π' и Π – системы тождеств для перехода от базиса Б к базису Б$'$ и от базиса Б$'$ к базису Б соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$.

Этапы доказательства. Конструктивно показать процесс перевода в другой базис (все тождества переводятся в другой базис с помощью системы формул перехода, на их основе производятся тождественные преобразования в другом базисе), преобразований в нем, перевод обратно. □

Следствие. Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭФ формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$ указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе Б.

Лемма. Любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Этапы доказательства. Основано на моделировании букв одним ребром, дизъюнкции – параллельным соединением, конъюнкции – последовательным соединением. Сложность высчитывается простым сложением. □

Лемма. При любых натуральных L и n выполняется неравенство $||\mathcal{U}^{\pi}(L,n)|| \le (12n)^L$.

Этапы доказательства. В силу предыдущей леммы, это эквивалентно утверждению, что число попарно неэквиалентных формул с поднятыми отрицаниями не более $(16n)^L$ (12 вместо 16 получается из-за того, что что мы умножаем на 2 не 8 (как в оригинальной оценке), а 6, потому что нет отрицаний). Рассмотрим формулы от удвоенного количества БП, воспользуемся теоремой об оценке количества неэквивалентных формул (второй из трех), учтем связь между рангом и длиной и получим нужную оценку. □

Лемма. При любых натуральных L и n выполняется неравенство $||\mathcal{U}^K(L,n)|| \le (8nL)^L$.

Этапы доказательства. Выделить остовное дерево $\mathcal{D}$, потом получить наддерево $\mathcal{D}'$, присоеденив каждое не вошедшее в $\mathcal{D}$ ребро схемы к одной из своих концевых вершин, отличных от входа, затем получить $\mathcal{D}''$, ориентировав ребра по направлению к корню. Число таких деревьев не более $(8n)^L$. Заметим также, что КС может быть получена в результате присоединения каждого листа дерева $\mathcal{D}''$ к одной из его вершин, отличной от выхода. Следовательно, получаем оценку. □

Лемма. Имеет место выводимость $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \rightrightarrows \{t_7 - t_{11}\}$.

Этапы доказательства. t_7 выводится применением к t_5 с совпадающими вершинами тождества t_6. t_8 – применить к x_1 t_4, потом к однородным метелкам t_5, потом t_3. t_9 – t_7 и $t_6^{(2)}$. t_{10} – t_7 и t_5. t_{11} – с помощью t_{10} делаем первый треугольник, который потом расширяем с помощью t_5. □

Лемма. При $n \ge 2$ имеет место выводимость $\tau_n \rightrightarrows \tau^{(n)}$.

Этапы доказательства. t_2, t_9 – очевидно, из самих себя. 8,3,4,5 – по индукции. 7 из 2 и 5; 10 и 11 из 7 и 5. □

Лемма. Для любой КС Σ, где $\Sigma \in \mathcal{U}^K$ и $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\hat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \hat{\Sigma}$.

Этапы доказательства. $\Sigma \Rightarrow \Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_3 \Rightarrow \Sigma_4 = \hat{\Sigma}$. Схема Σ_i обладает свойставами 1 – i канонической КС. $\Sigma \Rightarrow \Sigma_1$ – с помощью применения к каждому контакту тождества $t_4^{(n)}$. Теперь КС состоит из канонических цепей порядка n. $\Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_2$ – с каждой внутренней вершиной, из которой выходит некоторое количество (возможно и 1) однородных звезд различных цепей, проводим следующие операции. Каждую звезду заменяем на цикл по тождеству $t_{11}^{(n)}$. Добавляем "ненужные" висячие вершины, чтобы можно было применить тождество $t_3^{(n)}$ и удалить "мешающую" вершину. Удалив таким образом все внутренние вершины, не являющиеся внутренними вершинами канонических цепей, из Σ_1 получили Σ_2. $\Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_3$ – с помощью $t_6^{(n)}$ и t_7^n, $\Sigma_3 \Rightarrow \Sigma_4$ с помощью $t_{10}^{(n)}$. $\Box$

Теорема. Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП $x_1, \ldots, x_n$ существует ЭП вида $\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''$.

Этапы доказательства. Фактически, два раза использовать лемму и один раз $t_2^{(n)}$. $\Box$

Следствие. Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^K$ от БП $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие. Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^K$.

Лемма. Если $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n) \underset{\{t_1 - t_5\}}{\rightrightarrows} \Sigma''(x_1, \ldots, x_n)$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \underset{\tau_k}{\rightrightarrows} \Sigma''$, где $k < n$, то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k}.

Этапы доказательства. Доказать, что Θ не меняется при использовании тождеств $t_1 \ldots t_5$ с помощью простого перебора. Затем, заметить, что если проводит на наборе α, то он проводит на 2^{n-m} наборах, следовательно разность делится на 2^{n-m}, а значит, на 2^{n-k}. $\Box$

Теорема. В классе $\mathcal{U}^K$ не существует конечной полной системы тождеств.

Этапы доказательства. От противного: если ограничить число БП, например, числом n, то t_6^{n+1} не выводится. Чтобы это доказать, надо рассмотреть левую часть этого тождества. Разность функций Θ не делится на 2, что противоречит предыдущей лемме, следовательно нет вывода. $\Box$

Лемма. Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F, F' и F'' – матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда $F \geq F' \cdot F''$ и $F = F' \cdot F''$, если КС Σ'' разделительная по входам или КС Σ' разделительная по выходам.

Этапы доказательства. Рассмотрим случай бесповторной стыковки. q – количество выходов (входов) у Σ' (Σ''). Сначала надо доказать, что $f \geq f_1' \cdot f_2'' \vee \cdots \vee f_q' \cdot f_q''$ (равенство при разделительности). Для этого рассмотреть проводимость цепей через указанные вершины. Фактически, f – строка матрицы F. В случае отождествления входов имеет место поразрядная дизъюнкция строк. Стыковка общего вида сводится к отождествлению входов и бесповторной стыковки. В силу ассоциативности произведения матриц неравенство сохраняется. $\Box$

Следствие. В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине К $\Sigma, \Sigma = \Sigma''(\Sigma)$, которая соответствует выходу КС Σ', реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ', то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.

Следствие. Равенство $F = F' \cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Лемма. Если $(1, m)$- ККС Σ' реализует систему ФАЛ $\mathcal{F}' = (f_1', \ldots, f_m')$, то существует $(1, m)$-ККС Σ'', которая реализует систему ФАЛ $\bar{\mathcal{F}}' = (\bar{f}_1', \ldots, \bar{f}_m')$, и для которой $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$.

Этапы доказательства. В силу утверждения о том, что $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$, где Σ'' – дополнение Σ'. $\Box$

Лемма. Для любой ФАЛ существует реализующая ее ВП над базисом Б_0 ширины не больше, чем 2.

Этапы доказательства. Покажем, что любая ДНФ после оптимизации по числу отрицаний переходит в ВП ширины 2. Оптимизированную по числу отрицаний ДНФ можно вычислять так: в одной внутренней БП хранится значение ДНФ, а в другой вычисляемой импликанты.

Лемма. Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π-схема Σ_f, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства: $L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1$, $L(\Sigma_f) \leq n|N_f|$.

Этапы доказательства. В качестве $\mathcal{F}_f$ возьмем совершенную ДНФ. В ней $|N_f|$ ЭК, соответственно $|N_f| - 1$ дизъюнкций. В каждой ЭК n БП, соответственно $n-1$ конъюнкций. Также над каждой БП может быть отрицание. Таким образом, получаем $L(\mathcal{F}_f) \leq |N_f| - 1 + |N_f| \cdot (n - 1 + n) = 2n \cdot |N_f| - 1$. В π-схеме совершенной ДНФ будет $|N_f|$ цепей от одного полюса до другого по n контактов. $L(\Sigma_f) = n|N_f|$. □

Следствие. В силу предыдущей леммы, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π-схемой сложности 2, а также формулой из $\mathcal{U}^\Phi$, имеющей сложность 2, выполняются неравенства $L^C(n) \leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1$, $L^K(n) \leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n$

Следствие. В силу предыдущего следствия и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство $D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2$.

Лемма. Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π-схема Σ_f и формула $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f и для которых, наряду с первой леммой, справедливы также неравенства: $L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2$, $L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4$.

Этапы доказательства. В качестве Σ_f возьмем $(1, 2^n)$ КД, из которого удалим выходы, где реализуются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ f, и отождествим все оставшиеся выходы. Удалили $2^n - |N_f|$ выходов. В КД было $2 \cdot 2^n - 2$ контактов. Получим $L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^n - 2 - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2$. Формулу $\mathcal{F}_f$ получим, моделируя Σ_f. $R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f)$, количество конъюнкций и дизъюнкций равно $R(\mathcal{F}_f) - 1$. Таким образом $L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1$, где $L^-(\Sigma_f)$ – число размыкающих контактов в Σ_f. $L^-(\Sigma_f) \leq 2^n - 1$, $L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4$. □

Следствие. $L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2$, $L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4$

Лемма. Для каждого натурального n в $\mathcal{U}^C_Б$ существует универсальная СФЭ U_n порядка n, сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Этапы доказательства. В $\mathcal{U}^C_Б$ существует система формул, реализующая систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$. После присоединения эквивалентных вершин и удаления висячих вершин, получится СФЭ U_n, у которой ровно 2^{2^n} вершин, включая n входов (функций в $\vec{P}_2(n)$ ровно 2^{2^n}, все вершины различны, значит, мы не можем получить ни больше, ни меньше вершин). Получим $L(U_n) = 2^{2^n}$. □

Следствие. $L^C_Б(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n$.

Лемма. Для любого натурального n выполняются неравенства: $L^C(\vec{Q_n}) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}})$, $L^K(\vec{Q_n}) \leq 2^{n+1} - 2$, $L^C(\vec{J_n}) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}})$, $L^K(\vec{J_n}) \leq 2^{n+2} - 4$, $L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2$, $L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3$, $L^C(l_n) \leq 4n - 4$, $L^C(\bar{l}_n) \leq 4n - 4 + \lfloor \frac{1}{n} \rfloor$.

Этапы доказательства. Разобьем БП $X(n)$ на две группы $x' = (x_1, \dots, x_q), x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n), q = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Дешифраторы Σ', Σ'' – от x', x'' соответственно, реализующие свои системы ЭК по первой лемме. Объединим схемы, конъюнктируя каждую пару выходов. Для этого понадобится 2^n ФЭ &, их выходы считаем выходом Σ. Получим два дешифратора сложностью $n \cdot 2^{\frac{n}{2}}$ и 2^n ФЭ &. Откуда и выходят неравенства для $L^C(\vec{Q_n})$ и $L^C(\vec{J_n})$.

Для $L^K(\vec{Q_n})$ построим $(1, 2^n)$-КД. Его сложность $2^{n+1} - 2$. Сложность инверсной схемы (схемы для $\vec{J_n}$) не превосходит ее более, чем в два раза.

Для $L^\pi(\mu_n)$ построим $(1, 2^n)$-КД. Его выходы соединим с выходом мультиплексора контактами с пометками $y_0, \dots, y_{2^n-1}$. Сложность получившейся схемы будет $3 \cdot 2^n - 2$. Промоделируя π-схему, получим формулу сложности $4 \cdot 2^n - 3$ (надо просто аккуратно расписать моделирование КД).

Схема, реализующая $x_1 \oplus x_2$ – $\Sigma_2^\oplus$ имеет сложность 4. $\Sigma_n^\oplus$ является композицией $n-1$ схемы $\Sigma_2^\oplus$. Схема для $\bar{l}_n$ получается из схемы для l_n заменой всех ФЭ & на $\vee$ и всех ФЭ $\vee$ на &. □

Лемма. Если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то $L^C(f) \geq n - 1$, $L^K(f) \geq n$. Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП $x_i, i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то $L^C(f) \geq n$ (соответственно, $L^K(f) \geq n + k$).

Этапы доказательства. Если ФАЛ f существенно зависит от всех БП, то ранг минимальной СФЭ Σ_f не меньше n. Тогда $L^C(f) \geq L_{\vee,\&}(\Sigma_f) \geq n - 1$. Если ФАЛ f не монотонна, то должен быть еще хотя бы один ФЭ $\neg$, поэтому $L^C(f) \geq n$.

Поскольку ФАЛ f существенно зависит от всех БП, в минимальной КС Σ_f должны быть контакты с пометками x_i или $\bar{x}_i$, $i \in [1, n]$. Если при этом k БП не являются ни монотонными, ни инмонотонными БП ФАЛ f, то в Σ_f должно быть k замыкающих и k размыкающих контактов. Таким образом, $L^K(f) \geq n + k$. $\square$

Следствие. $L^C(l_n) \geq n$, $L^K(l_n) \geq 2n$, $L^C(\mu_n) \geq 2^n + n$, $L^K(\mu_n) \geq 2^n + 2n$.

Лемма. Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство $L^K(F) \geq m$ (соответственно, $L^C_{\text{Б}}(F) \geq m$).

Этапы доказательства. Σ_F – приведенная $(1, m)$-КС, реализующая F. Σ_F – связный граф с не менее, чем $m + 1$ вершиной. Следовательно, $L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m$. Второе неравенство вытекает из того, что $f_i, i \in [1, m]$ реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов. $\square$

Следствие. $L^C(\vec{Q_n}) \geq 2^n$, $L^K(\vec{Q_n}) \geq 2^n$, $L^C(\vec{J_n}) \geq 2^n$, $L^K(\vec{J_n}) \geq 2^n$, $L^C_{\text{Б}}(\vec{P_2}(n)) \geq 2^{2^n} - n$, $L^K(\vec{P_2}(n)) \geq 2^{2^n} - 2$.

Замечание В силу следствия универсальная СФЭ U_n, построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе $\mathcal{U}^C_{\text{Б}}$

Лемма. Для положительных действительных чисел a, y, q из неравенств $a \log q > 1$, $(ay)^y \geq q$, следует неравенство $y \geq \frac{\log q}{\log(a \log q)}(1 + \frac{\log \log(a \log q)}{\log(ae \log q)})$, где e – основание натурального логарифма, а из неравенств $a > 1$, $a^y \geq q$ – неравенство $y \geq \frac{\log q}{\log a}$.

Этапы доказательства. Второе неравенство вытекает непосредственно из определения логарифма. Докажем первое неравенство. Рассмотрим случай, когда $a = 1, \log q > 1$. Возьмем y' равным правой части неравенства. Тогда можно показать, что $y' \log y' \leq \log q$, и получим, что доказыаемое неравенство верно, используя условие $(ay)^y \geq q$. При $a > 0$, $(ay)^y \geq q$ эквивалентно $(ay)^{ay} \geq q^a$. И доказываемое нeравество получается из $y \geq y'$ заменой y на ay и $\log q$ на $a \log q$. $\square$

Теорема. Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, выполняются неравенства $L^C(f) \geq (1 + \varepsilon(n))\frac{2^n}{n}$, $L^\Phi(f) \geq (1 - \varepsilon(n))\frac{2^n}{\log n}$, $L^K(f) \geq (1 - \varepsilon(n))\frac{2^n}{n}$, $L^\pi(f) \geq (1 - \varepsilon(n))\frac{2^n}{\log n}$, $D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon(n)$.

Этапы доказательства. Воспользуемся неравенствами $||\mathcal{U}^C(L, n)|| \leq (8(L + n))^{L+1}$, $||\mathcal{U}^\Phi(L, n)|| \leq (8n)^{L+1}$, $||\mathcal{U}^K(L, n)|| \leq (8nL)^L$. А также замечанием о том, что если для некоторых $n, \widehat{\Psi}, 0 < \delta < 1$ выполняется $||\mathcal{U}(\widehat{\Psi}, n)|| \leq \delta \cdot 2^{2^n}$, то $\Psi(f) \geq \widehat{\Psi}$ для не менее чем $(1 - \delta) \cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$. Искомые неравенства получим, подставляя особым образом подобранные δ, a, y и q в предыдущую лемму и указанное утверждение. $\square$

Следствие. $L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$, $L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}$, $L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$, $L^\pi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}$.

Лемма. Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства: $L^K(l_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$, $L^K(\vec{P_2}(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n}$.

Этапы доказательства. Оценка для линейной функции напрямую следует из построения схемы Кардо. При этом $\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$ нужно для случая, когда $n = 1$. Для получения второй оценки обратимся к Михаилу. $\square$

Теорема. Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения: $L^K(n) \lesssim 4\frac{2^n}{n}$, $L^C(n) \lesssim 8\frac{2^n}{n}$.

Этапы доказательства. Применим метод Шеннона синтеза ФАЛ путем разложения функции по $(n - q)$ последним переменным. КС (СФЭ) для ФАЛ f представляет собой суперпозицию универсального многополюсника порядка q и мультиплексора порядка $(n - q)$. Взяв параметр q нужным образом, а также воспользовавшись результатом предыдущих оценок сложности этих схем получим требуемые оценки. $\square$

Лемма. Для любых натуральных p, m и s, где $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$, существует стандартное ДУМ G порядка m и высоты s, которое является ДУМ ранга p и для которого:

1. $\lambda = |G| \leq p 2^s$

2. система из p ортогональных характеристических $\psi_1, \ldots, \psi_p$ ДУМ G обладает тем свойством, что для любой ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, и некоторых ФАЛ $g_1, \ldots, g_p$ из G справедливо

не только представление $g = g_1 \vee \ldots \vee g_p$, но и $g = \psi_1 g_1 \vee \ldots \vee \psi_p g_p$.

Этапы доказательства. По построению стандартного ДУМ. $\square$

Теорема. Метод Лупанова. Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ $\Sigma_f, \Sigma_f \in \mathcal{U}^C$, такая, что $L(\Sigma_f) \le \frac{2^n}{n}(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n})$.

Этапы доказательства. Как и в методе Шеннона, разложим ФАЛ f по $(n-q)$ последним переменным. Найдем СФЭ, реализующую ФАЛ f, в виде $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' – мультиплексор порядка $(n-q)$, а Σ' реализует систему функций, которая реализует все ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_q), \sigma'' \in B^{n-q}$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. Каждая такая ФАЛ будет реализована, как дизъюнкция характеристических ФАЛ стандартного ДУМ G.

Построим стандартное ДУМ G порядка q и высоты $s \le 2^q$. Σ_G – СФЭ, которая реализует систему ФАЛ $\vec{G}$ и представляет собой объединение схем, построенные моделированием функций их совершенными ДНФ. В G не более $p \cdot 2^s$ функций, в каждой из которых не более 2^q единиц. Тогда, по лемме о сложности ФСЭ, реализующей совершенную ДНФ функции, получим: $L(\Sigma_G) \le 3p2^{s+q}$. Сложность мультиплексора уже рассматривалась. $L(\Sigma'') \le 4 \cdot 2^{n-q}$.

Для реализации каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ нужно $(p-1)$ ФЭ $\vee$. Всего таких ФАЛ 2^{n-q}. Таким образом получим схему Σ': $L(\Sigma') = 2^{n-q}(p-1) + L(\Sigma_G)$. $L(\Sigma_f) \le 2^{n-q}(p-1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q}$. Взяв параметры s, m, q нужным образом, получим требуемую оценку. $\square$

Следствие. $L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}$.

Лемма. Для любых натуральных m, λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, либо с ее отрицанием.

Этапы доказательства. Поясню, что имеется в виду под "любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, либо с ее отрицанием". Это значит, что столбец значений любой ФАЛ g_i на первых m переменных наборов из δ_j совпадает со столбцом значений одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, либо с его отрицанием.

В качестве δ_1 мы берем m-регулярное множество, отвечающее системе ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_\lambda)$. Чтобы получить $\delta_2, \ldots, \delta_{2^{q-m}}$, мы всеми возможными способами накладываем отрицание на $(q-m)$ последних столбцов. Любой набор из B^q есть в δ с точностью до $(q-m)$ последних столбцов. Поскольку мы перебирали все возможные отрицания $(q-m)$ последних столбцов, в одном из δ_i найдется искомый набор. Из этого и из того, что $|\Delta| = 2^q$ получаем, что Δ – разбиение B^q. $\square$

Теорема. Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, в $\mathcal{U}^\Phi$ существует реализующая ее формула $\mathcal{F}_f$, для которой $L(\mathcal{F}_f) \le \frac{2^n}{\log n}(1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n})$.

Этапы доказательства. Построим стандартное ДУМ G порядка m и высоты $s \le 2^m$, $|G| = \lambda$, $q = m + \lambda$, $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^\lambda})$ – разбиение B^q, полученное для $\vec{G}$ по предыдущей лемме. Построим для f формулу, имеющую вид $\widetilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathcal{U}_i(x') \widehat{\mathcal{F}}_{n-q}(x'', J_{\widetilde{0},i}, \ldots, J_{\widetilde{1},i})$. $\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}(x'', y_0, \ldots, y_{2^{n-q}-1})$ – мультиплексор порядка $(n-q)$, $\mathcal{U}_i, i \in [1, 2^\lambda]$ – совершенная ДНФ характеристической ФАЛ δ_i, $J_{\sigma'',i}$ моделирует ФАЛ f на компоненте δ_i. После оптимизации $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ по числу отрицаний, получим $L_{\&,\vee}(\mathcal{F}_f) \le 2^{q-m}(q \cdot 2^m + (p-1)2^{n-q} + 3 \cdot 2^{n-q})$, $L_\neg(\mathcal{F}_f) \le q \cdot 2^q + 2 \cdot 2^{n-m}$. Взяв m и s правильным образом, получим необходимую оценку. $\square$

Замечание. Установленная оценка справедлива и для сложности π-схемы $\widetilde{\Sigma}_f$, которая моделирует построенную в ходе получения формулы $\mathcal{F}_f$ формулу $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ с поднятыми отрицаниями и реализует ФАЛ f.

Замечание. $Alt(\widetilde{\mathcal{F}}_f) \le Alt(\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}) + 3$.

Следствие. $L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}$, $L^\pi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}$.

Теорема. Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $D(n) \le n - \log \log n + O(1)$.

Этапы доказательства. Вместо мультиплексора из предыдущего доказательства следует взять КД порядка $(n-q)$. Откуда и получим требуемую оценку.

Следствие. $D(n) = n - \log \log n \pm O(1)$.

Теорема. Асимптотически наилучший метод. Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что $L(\Sigma_f) \le \frac{2^n}{n}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$.

Этапы доказательства. Построим стандартное ДУМ G порядка m и высоты $s \le 2^m$, $|G| = p$, $q = m + p$. $\psi_1, \ldots, \psi_p$ – характеристические функции G. $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^p})$ – разбиение B^q, полученное для $\vec{G}$. По свойствам данного разбиения, любая ФАЛ $g, g \in P_2(q)$ на любой компоненте разбиения вида $\delta_1 \oplus \alpha$, где $\alpha = (0, \ldots, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+p})$ совпадает с ФАЛ $\check{g} = x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \ldots \vee x_q^{\bar{\alpha}_q} \cdot g_p$, где $g_i = g\psi_i$.

Пусть $q = m + p$, Σ_G – $(1, \lambda)$-КС, реализующая систему ФАЛ $\vec{G}$ на основе КД. Построим 2^p $(1, 2^{n-q})$-КС, которые содержат КС Σ_G в качестве подсхемы и реализуют каждую ФАЛ $\check{g}_{\sigma''}$. Σ' получается в результате отождествления входов всех построенных КС.

Σ'' строим, как КС, реализующую столбец из всех ФАЛ вида $\chi_i(x') \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \ldots x_n^{\sigma_n}$. Строим объединением 2^p КД порядка $(2^{n-q}, 1)$ и $(2^p, 1)$ КД, реализующим χ_i отождествлением выходов. $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$. $L(\Sigma_f) \le (p+2)2^{n-m} + (\lambda+1)2^{q+1}$. Взяв параметры m и s нужным образом, получим необходимую оценку. □

Следствие. $L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}$.

Замечание. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем $\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O(\frac{2^n}{n\sqrt{n}})$ "звезд", каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.

Лемма. Для класса Фал $\mathcal{Q}$ такого, что $n = o(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|})(\log n = o(\log\log|\mathcal{Q}(n)|))$, выполняются следующие асимптотические неравенства $L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}$, (соответственно $L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}$).

Этапы доказательства. Доказывается аналогично последней теореме второго параграфа.

Лемма. Если разделительная по выходам $(1, m)$-КС Σ реализует m различных ФАЛ, отличных от 0, то $L(\Sigma) \ge 2m - 2$.

Этапы доказательства. Σ – связная КС. Из ее разделительности следует, что $\forall\alpha, \alpha \in B^n$ сеть $\Sigma|\alpha$ состоит не менее чем из m компонент связности. Значит, было удалено не менее, чем $m-1$ контактов. Таким образом получим, что $|E(\Sigma|\bar{\alpha})| \ge m-1$. Суммируя это неравенство по всем наборам куба B^n и учитывая, что каждый контакт КС Σ не проводит ровно на половине всех наборов (каждый контакт был посчитан столько раз, сколько наборов он проводит, то есть 2^{n-1} раз) получим $2^{n-1}L(\Sigma) \ge 2^n(m-1)$. Откуда и следует доказываемое неравенство. □

Следствие. Контактное дерево порядка n является минимальной разделительной $(1, 2^n)$-КС, реализующей систему ФАЛ Q_n.

Лемма. Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то $L^K(F) \ge 2^{1-n} \sum\limits_{j=1}^{m} |N_{f_j}|$.

Этапы доказательства. $\forall\alpha, \alpha \in B^n$ в сети $\Sigma|\alpha$ имеется компонента связности, включающая вход и столько выходов, сколько функций обращаются в единицу на α. Отсюда получим $|E(\Sigma|\alpha)| \ge f_1(\alpha) + \cdots + f_m(\alpha)$. Суммируя неравенство во всем наборам получим $2^{n-1}L(\Sigma) \ge \sum\limits_{j=1}^{m} |N_{f_j}|$.

Следствие. $L^K(J_n) \ge 2^{n+1} - 2$.

Лемма. Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $L^K(\vec{Q_n}) \le 2^n + O(\frac{2^n}{n})$, $L^K(\vec{J_n}) \le 2^{n+1} + O(\frac{2^n}{n})$.

Этапы доказательства. Выберем параметры: $\lambda = 2^m$, $q = m + \lambda$, $q \le n$. $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^\lambda})$ – m-регулярное разбиение куба B^q, отвечающее системе $\vec{Q}_m$ – системе ФАЛ из ЭК ранга m. Любая ЭК ранга q – $K(x') = x_1^{\sigma_1} \ldots x_q^{\sigma_q}$, $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q) \in \delta_i$ совпадает на множестве δ_i с одной из ЭК системы $\vec{Q}_m$. Иначе говоря, совпадает с БП $x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}}$, $m+1 \le j_{\sigma'} \le q$, $\alpha_{\sigma'} \in B$. Любая ЭК $K = x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$ может быть представлена в виде $K = \chi_i(x') \cdot x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}} \cdot K_{\sigma''}(x'')$.

$(1, 2^\lambda)$-КС Σ' реализует систему ФАЛ $\vec{\chi}$ объединением КС для χ_i, построенных на основе их совершенных ДНФ. $K_{\sigma''}(x'')$ реализуются КД. Получается схема $\Sigma_n^{(\&)}$.

В схеме $\Sigma_n^{(\&)}$ 2^λ подсхем сложностью $q2^m$ (сложность Σ_i') + $2^{n-q+1} - 2$ (сложность КД порядка $n - q$) + $2^{n-q} \cdot \lambda$ (к каждому из выходов КД присоединено λ контактов). Получаем $L(\Sigma_n^{(\&)}) = 2^\lambda(q2^m + 2^{n-q+1} - 2 + \lambda 2^{n-q})$. Вспомним, что $\lambda = q - m$, раскроем скобки и получим: $L(\Sigma_n^{(\&)}) = \lambda 2^{n-m} + 2^{n-m+1} + q2^q$. Откуда и получим требуемую оценку. □

Следствие. $L^K(\vec{Q_n}) \sim 2^n$, $L^K(\vec{J_n}) \sim 2^{n+1}$.

Лемма. Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $L^\pi(\mu_n) \le 2 \cdot 2^n + O(\frac{2^n}{n})$, $L^C(\mu_n) \le 2 \cdot 2^n + O(\frac{2^n}{n})$, $D(\mu_n) \le n+6$, причем существует такая реализация ФАЛ μ_n и бесповторная по информационным БП формула $\mathcal{F}_n$ с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит $7 \cdot 2^n$.

Этапы доказательства. Искомая π-схема Σ_n получается в результате присоединения к каждому из выходов $\Sigma_n^{(\&)}$ соответствующей ему информационной БП и отождествления концевых вершин всех таких контактов в выходную вершину Σ_n. СФЭ S_n получается из формулы, моделирующей Σ_n в результате приведения вершин, соответствующих ФЭ $\neg$.

Формулу $\tilde{\mathcal{F}}_n$ построим моделированием КС Σ_n. Формулу $\mathcal{F}_n$ получим из нее оптимизацией по глубине. Получим формулу, обладающую всеми необходимыми свойствами. $\square$

Лемма. Если для ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, и для любого $\sigma, \sigma \in B$, ФАЛ $f_\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то $L^C_{\&,\vee} \ge \min\{L^C_{\&,\vee}(f_0), L^C_{\&,\vee}(f_1)\} + 2$.

Этапы доказательства. Пусть Σ – минимальная по числу ФЭ & и $\vee$ СФЭ из класса $\mathcal{U}^C$, которая реализует ФАЛ f и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ $\neg$. Пусть константа $\sigma, \sigma \in B$ равна 0 тогда и только тогда, когда БП x_n подается в Σ либо на вход ФЭ &, либо на вход ФЭ $\neg$, выход которого поступает на вход ФЭ $\vee$. Тогда при подстановке σ вместо x_n и ЭП на основе тождеств подстановки констант будут удалены по крайней мере два ФЭ типа & или $\vee$. $\square$

Следствие. $L^C(\mu_n) \ge 2^{n+1} + n - 2$.

Следствие. $L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}$.

Следствие. $n + 1 \le D(\mu_n) \le n + 6$.

Лемма. Функция теста $f(y_1, \ldots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M, $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ $f(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge\limits_{(i,j)\in\mathcal{N}} \left(\bigvee\limits_{\substack{1 \le t \le p \\ M\langle t,i\rangle \ne M\langle t,j\rangle}} y_t \right)$

Этапы доказательства. ФАЛ теста F для пары $(M, \mathcal{N})$ является одновременно ФАЛ покрытия для матрицы M и обратно. Так что лемма верна согласно первой лемме шестого параграфа первой главы. $\square$

Следствие. Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $f(y_1, \ldots, y_p)$, получающаяся из КНФ леммы в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$ и обратно.

Лемма. Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s - 1)$.

Этапы доказательства. Пусть $M \in B^{p,s}$ и первые t строк матрицы M образуют ее тупиковый диагностический тест. $\widehat{M}$ - матрица, состоящая из первых t строк матрицы M. Число различных булевых столбцов высоты t равно 2^t. Поскольку все s столбцов различны, $s \le 2^t$, то есть $t \ge \lceil \log s \rceil$.

$\forall q, q \in [1, t]$ определим отношение эквивалентности: $m' \underset{q}{\sim} m''$ тогда и только тогда, когда столбцы m', m'' матрицы $\widehat{M}$ совпадают в строках с номерами из $[1, q]$. Число классов эквивалентности – $\theta(q)$. Поскольку тест тупиковый, $\theta(q) < \theta(q+1)$. Поскольку тест диагностический, $\theta(t) = s$. Получаем $1 = \theta(0) < \theta(1) < \cdots < \theta(t) = s$, то есть $t \le (s - 1)$. $\square$

Лемма. Пусть $\varphi(s)$, $t(s)$ и $p(s)$ – целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента s, для которых $t(s) = \lceil 2 \log s \rceil + \varphi(s), p(s) \ge t(s), \varphi(s) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ первые $t(s)$ строк образуют диагностический тест.

Этапы доказательства. Оценим количество заданных матриц $B^{p(s),s}$: $2^t(2^t - 1)\ldots(2^t - s + 1) \cdot 2^{(p-t)s} = 2^{ps}(1 - \frac{1}{2^t})\ldots(1 - \frac{(s-1)}{2^t})$. Их доля среди всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ (2^{ps}) не меньше, чем $(1 - \frac{1}{2^t})\ldots(1 - \frac{(s-1)}{2^t}) \ge 1 - \frac{s^2}{2^t} \ge 1 - 2^{-2\varphi(s)}$, что стремится к 1 при s стремящемся к бесконечности. $\square$

Следствие. Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции $\varphi(s)$ у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ длина минимального диагностического теста не больше, чем $2 \log s + \varphi(s)$.

Лемма. Для любых $p \geq 0$, $q \geq 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС $\Sigma', \Sigma' \in \mathcal{U}^K_{(p,q)}$, для которой $L(\Sigma') \leq (p+1)(q+1)L(\Sigma)$.

Этапы доказательства. Схема строится путем параллельного и (или) последовательного дублирования контактов. □

Лемма. Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей (1, 0)- и (0, 1)-самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответственно такие, что $L(\Sigma') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma), L(\Sigma'') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma)$.

Этапы доказательства. Строится заменой однородных метелок на циклы (звезды). □

Теорема Для $n = 1, 2, \ldots$ имеют место следующие асимптотические равенства: $L^K_{(1,0)}(n) \sim L^K_{(0,1)}(n) \sim \frac{2^n}{n}$

Этапы доказательства. Нижние оценки следуют из первой теоремы второго параграфа третьей главы. Верхние оценки следуют из первой теоремы шестого параграфа третьей главы и замечания к ней. $\zeta(\Sigma_f) = o(\frac{2^n}{n\sqrt{n}})$. Так что существуют КС, которые реализуют ФАЛ f со сложностью, асимптотически не превосходящей $\frac{2^n}{n}$. □

Лемма. Для $n = 1, 2, \ldots$ имеют место равенства $L^K_{(0,1)}(l_n) = L^K_{(0,1)}(\bar{l}_n) = 4n$.

Этапы доказательства. Для каждого $\sigma, \sigma \in B$, из входа (выхода) этой схемы, проведем контакт вида x_n^σ (x_1^σ) в вершину, соединенную контактом вида $x_n^{\bar{\sigma}}$ $(x_q^{\bar{\sigma}})$ с ее выходом (входом).